Jean Sousselier

19/11/23

CANTOR A-T-IL RAISON ?
Réflexions sur la dénombrabilité des ensembles infinis.
Par Jean Sousselier

1. Retour sur la preuve de CANTOR.

Pour prouver que l'ensemble des réels de l'intervalle [0,1] n'est pas dénombrable, Cantor a mis en évidence l'incohérence induite par une bijection de cet ensemble avec l'ensemble N des entiers naturels. En effet, si une telle bijection existait, on pourrait écrire :

$$[0,1] = \{X_1,X_2,X_3,\ldots.\}$$

chaque réel X_i s'écrivant :

$$X_i = 0,a_1a_2a_3a_4a_5\ldots$$

Considérons alors le nombre réel Y dont la i ème décimale vaut 1 si la i ème décimale a_i de X_i est différente de 1, et 2 dans le cas contraire, et ceci pour toutes les valeurs de i, jusqu'à l'infini.
Le nombre réel Y ainsi créé est donc différent de X_i par sa i ème décimale, et ceci pour tout i. Il n'appartient donc pas à l'ensemble précédent $\{X_1,X_2,X_3,\ldots.\}$.
On arrive donc bien à une contradiction, et on en conclut que l'ensemble des réels n'est pas dénombrable : c'est ce raisonnement que nous appellerons par la suite "preuve de Cantor".

2. Application du même procédé aux nombres entiers.

On peut appliquer le même raisonnement avec les nombres entiers. On peut définir une bijection des entiers sur N par extension, en procédant ainsi : on prend d'abord tous les nombres impairs, par ordre croissant :

$$X_1 = 1$$
$$X_2 = 3$$
$$X_3 = 5$$
$$\ldots\ldots\ldots.$$

Considérons maintenant les nombres pairs, par exemple le nombre 2 : quel que soit n, on n'a jamais $X_n = 2$ donc ce nombre n'appartient pas à notre liste en correspondance biunivoque avec N.

3. Discussion.

De ce qui précède, on doit conclure que le raisonnement qui est à la base de la démonstration est faux, à savoir : "ayant supposé avoir classé (ou ordonné, ou numéroté) tous les éléments de mon ensemble, j'en trouve un qui en fait ne peut pas être classé, donc la bijection avec l'ensemble des entiers n'est pas établie, donc mon ensemble n'est pas dénombrable".

Il y a cependant une différence entre les exemples des paragraphes 1 et 2 : dans le cas des nombres réels, la démonstration s'applique à n'importe quelle bijection (numérotation), alors que dans le cas des nombres entiers, la démonstration s'applique à une numérotation bien choisie. Cela est vrai, mais n'empêche pas le défaut de cette démonstration, qui pour être valide devrait l'être dans tous les cas.

Autrement dit, la conclusion avec les nombres réels est : "quelle que soit la bijection avec N que l'on imagine, on peut trouver des nombres n'appartenant pas à cette bijection".
Avec les nombres entiers, la conclusion est : "il existe des bijections avec N telles que certains nombres n'appartiennent pas à cette bijection".

Cette différence n'est pas suffisante pour remettre en cause la non-validité de la preuve de Cantor, mais cela apporte quand même un certain trouble.

Cette non-validité tient peut-être à l'utilisation du mot "dénombrable" qui est choisi par Cantor, alors que le mot « énumérable » aurait été préférable. En effet le mot « dénombrable », inclut la notion de nombre, qui n'a rien à faire ici, qui n'a aucune signification s'agissant d'un ensemble infini, et cet artifice sémantique est trompeur. Toutes les considérations subséquentes sur la cardinalité des ensembles infinis ne sont qu'une extension absolument injustifiée, donc fallacieuse, de la cardinalité des ensembles finis. Cet abus de vocabulaire n'autorise en rien à poser que le cardinal de tel ensemble infini est inférieur au cardinal de tel autre. Tout ce que prouve Cantor, c'est qu'il n'y a pas de bijection possible entre l'ensemble des réels et l'ensemble des entiers, point final.
Quant à la dénombrabilité, elle ne peut avoir aucune définition, c'est un non-sens appliqué à l'infini.

On ne peut que souscrire à ce texte publié sur Wikipedia, à l'exception de la dernière phrase !

Jusqu'à Cantor, l'infini est l'infini potentiel, la possibilité de continuer un processus sans s'arrêter. La comparaison d'ensembles infinis suppose l'infini dit achevé, actuel ou encore complet : un ensemble infini vu comme une totalité, ce qu'ont refusé beaucoup de mathématiciens (Gauss, ou à l'époque de Cantor, Kronecker). Pour ceux-ci le fait de considérer une infinité d'objets comme un tout, par exemple tous les entiers naturels, c'est-à-dire la notion même d'*ensemble* infini, n'a pas de sens. L'infini résulte seulement d'un procédé d'énumération sans répétitions qui ne s'interrompt pas. Seul l'infini dénombrable peut alors avoir à la rigueur un sens ; il est compris par le procédé qui l'engendre, plutôt que par la totalité de ses éléments. L'infini achevé sera encore contesté par Henri Poincaré, contestation qui fonde également l'intuitionnisme de Brouwer, celui-ci en donnant la forme la plus élaborée. Pour ce dernier seul l'infini dénombrable (en tant qu'infini potentiel) existe, « l'ensemble des réels entre 0 et 1 » n'a pas de sens, mais si ses conceptions sont cohérentes, elles induisent une profonde remise en cause des mathématiques. En distinguant le premier deux infinis distincts, et en en déduisant de façon simple un résultat mathématique déjà obtenu de façon différente par Joseph Liouville, Cantor donne des arguments pour l'infini complet, qu'aujourd'hui ne songent même plus à discuter la très grande majorité des mathématiciens.

4. Il ne faut pas traiter l'infini comme le fini.

L'argument de Cantor revient à étendre à « l'infini » la proposition « jusqu'à la ligne n, on a construit un nombre différent de ceux des n premières lignes » : Cette proposition étant vraie quel que soit n, elle est vraie à l'infini.

- Considérons la proposition suivante : soient les nombres y=1 et x_n = 0,999999999 (avec n chiffres 9).
  Quel que soit n, on a x_n strictement inférieur à y. Si on raisonne comme Cantor, on aboutit à la conclusion que le nombre 0,9999… avec une infinité de 9 est strictement inférieur à 1 ! Cette conclusion devrait laisser perplexe.
- Autre argument : on sait que l'ensemble des parties de N ayant au plus n éléments est dénombrable. Cela est vrai quel que soit n, donc c'est vrai à l'infini. Or, c'est manifestement faux, en tous cas absolument contradictoire avec la conclusion de Cantor !

On voit donc qu'étendre à l'infini une proposition vraie quel que soit n n'est pas toujours valide. Du reste, c'est bien ce qu'applique spontanément les mathématiciens quand ils disent que 2 parallèles ne se rencontrent jamais ….sauf à l'infini !

5. Où Cantor est pris à son propre jeu

Montrons une autre faille du raisonnement de Cantor : prenons le nombre x trouvé par Cantor comme n'appartenant pas à notre bijection, et considérons le nouveau classement suivant : d'abord x, puis la bijection initiale. Nous avons créé ainsi une nouvelle bijection incluant le nombre qui était précédemment extérieur à notre bijection (cf Hilbert et son hôtel avec une infinité de chambres). Et on peut recommencer autant de fois que l'on voudra, chaque fois que Cantor construit un nombre ne figurant pas dans notre classement, nous constituons immédiatement un nouveau classement en le mettant en tête du classement précédent. Donc qui a raison à ce petit jeu-là ? Personne, car si Cantor affirme « Quelle que soit la bijection que vous ferez, je construirai un nombre qui lui sera extérieur », nous lui répondons : « Quel que soit le nombre que vous proposerez ainsi, nous établirons une nouvelle bijection qui l'intègrera ».

6. Un exemple encore plus troublant.

Considérons l'ensemble A des vecteurs : {a1, a2,...,an}
chaque ai étant un entier $\in$ N, et n étant un entier quelconque. Le cardinal de cet ensemble A est donc de l'ordre de : $N°^{N°}$ en désignant par N° le cardinal de N, il est supérieur au cardinal de l'ensemble des réels.
Or l'ensemble A est dénombrable, puisqu'il s'agit de l'ensemble des parties finies de N.

7. Quand on peut démontrer qu'il y a plus d'entiers que de nombres réels !

Beaucoup mieux qu'une simple bijection entre les réels et les entiers, démontrons qu'on peut établir une correspondance entre les réels et des sous-ensembles infinis d'entiers, chaque entier n'existant bien entendu que dans un seul sous-ensemble au plus.
Etablissons cette correspondance pour tous les réels compris entre 0,1 et 1, la généralisation à l'ensemble des réels ne posant pas de difficultés.
Considérons un tel nombre X réel, et sa représentation avec une « infinité » de chiffres :
$X = 0, x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5 \ldots$ et soit A(X) l'ensemble infini d'entiers suivant :
$A(X) = \{ x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3, x_1x_2x_3x_4, x_1x_2x_3x_4x_5, \ldots\}$
Ces entiers sont bien entendu tous différents. Associons à X l'ensemble S(X)=A(X).
Considérons un autre réel $Y = 0,y_1\ y_2\ y_3\ y_4 \ldots$
Soit k le plus petit indice tel que x_k soit différent de y_k (k existe bien si Y est différent de X).
Tous les entiers de l'ensemble A(Y) à partir de $y_1y_2y_3\ldots y_k$ sont différents de tous les entiers de l'ensemble A(X), puisqu'ils diffèrent au moins par leur kème chiffre. Associons donc à Y le sous-ensemble S(Y) de A(Y) : $S(Y) = \{ y_1y_2y_3 \ldots y_k, \ldots\}$
On peut continuer indéfiniment : pour chaque nouveau réel U, on considère l'indice k défini ainsi : soit k(X) le plus petit indice tel que x_k soit différent de u_k , on prend pour k le plus grand des nombres k(X), k(Y), k(Z), etc…, et on associe à U le sous-ensemble S(U) comprenant tous les entiers de A(U) à partir de $u_1u_2 \ldots u_k$.
Quel que soit l'ensemble {X,Y,Z,........,U,..} de nombres réels, on peut ainsi faire correspondre à chaque U une infinité d'entiers S(U) qui ne sont présents dans aucun sous-ensemble précédent S(X), S(Y), etc..
Il y a donc « beaucoup plus » d'entiers que de nombres réels. N'est-ce pas troublant ?

Remarque : Il y a une faiblesse dans cette démonstration, qui est la suivante : quand on énumère les réels comme ci-dessus, pourquoi ne pas associer l'entier 1 au premier réel proposé, l'entier 2 au deuxième, etc. : on aurait alors établi d'une façon extrêmement triviale une bijection entre réels et entiers ! La faille de ce processus vient du fait qu'on ne sait pas énumérer les réels, il n'y a aucune méthode pour cela, comme on l'a déjà remarqué plus haut. Cela semble disqualifier notre raisonnement. Il n'en reste pas moins qu'à défaut d'épuiser l'ensemble des réels, ce que personne ne sait faire, on met en évidence que quel que soit l'ensemble de réels que l'on considère, (fini ou infini), on sait associer à chacun d'eux une infinité d'entiers, tous différents bien entendu. On aurait donc tendance à conclure que le cardinal des entiers est d'un ordre supérieur au cardinal des réels !

8. Conclusion.

Tout cela donne à penser que Kronecker et Poincaré avaient raison, contre Cantor.

Jean Sousselier

Compléments ajoutés en 2019

9. La nature des 2 infinis.

L'ensemble N des entiers est à la fois **infini** et **défini** : tous ses éléments peuvent être construits selon des règles rigoureuses. En revanche, l'ensemble R des réels, comme l'ensemble P(N) des parties de N sont **infinis**, mais aussi **indéfinis** : on ne sait pas définir (construire) l'ensemble de leurs éléments.

Par exemple, l'énoncé : « *un nombre réel est un nombre qui peut être représenté par une partie entière et une liste finie ou infinie de décimales* » ne saurait en aucun cas être une définition, c'est juste une propriété. De même, assimiler un nombre réel à un point d'une droite est inapproprié, puisque la notion de point est elle-même non définie.
Enfin, la définition des réels à partir des coupures de Dedekind est inopérante, car comment construire toutes les parties de Q (ensemble des rationnels) se prêtant à ces coupures (donc ayant une borne supérieure finie ? Cela ne peut se faire que dans des cas particuliers.
Les mathématiciens, qui ont mis autant de soin à définir rigoureusement la notion de nombre entier ne saurait se contenter de définitions aussi vagues des nombres réels.

En résumé, on sait parfaitement identifier comme tel un nombre réel quand on en rencontre un qui a une définition précise (par exemple x tel que $x^2 = 2$), ou encore une partie de N qui a une définition précise (comme l'ensemble des nombres premiers), mais aucune règle ne permet de les construire tous. Si on avait une telle règle pour un de ces ensembles, on saurait ipso facto énumérer tous ses éléments, donc il serait « dénombrable » !

Donc il y a des ensembles **infinis** et **définis**, donc énumérables (l'ensemble N ou l'ensemble des parties finies de N), et des ensembles **infinis** et **non définis**, donc non énumérables, comme R. La différence de nature de ces 2 types d'infini procède de la possibilité ou non de les définir.

Il serait plus judicieux de réfléchir sur cette cause de distinction, plutôt que gloser sur une conséquence gratuite (la cardinalité de ces ensembles).

10. Retour sur la distinction défini/non défini.

L'ensemble N des entiers naturels est bien défini (cf Peano) : partant de 0, et avec la fonction « successeur » on construit ainsi l'ensemble N, en atteignant n'importe quel élément de cet ensemble.
Ce n'est pas le cas de l'ensemble R des réels, ni de l'ensemble P des parties de N.
Montrons d'abord que ces 2 ensembles sont les mêmes : un élément x de R compris entre 0 et 1 s'écrit, en adoptant une numérotation en base 2 :

$x = 0,a_1a_2a_3a_4......a_n...$

avec $a_n = 0$ ou 1. On peut associer à x l'élément y de P tel que

$a_n = 1 \rightarrow n \in y$

et inversement bien entendu. Ces 2 ensembles sont donc les mêmes.

Quel que soit l'entier ω, on peut construire les 2^{ω} parties de N dont les éléments sont inférieurs ou égaux à ω. Mais contrairement à ce qui se passe avec la construction des entiers de N, on n'arrive pas à construire ainsi tous les éléments de P, **si grand que soit ω** : par exemple l'ensemble des nombres pairs ne sera jamais atteint. Et bien entendu toute autre méthode de construction aboutirait au même échec (sinon, comme dit précédemment, l'ensemble serait « dénombrable »).

11. Remarque finale.

La position d'Henri Poincaré est clairement exposée dans ses « Dernières Pensées », publiées à titre posthume.
Il distingue deux catégories de mathématiciens, les Pragmatistes et les Cantoriens. Ces deniers, à la différence des premiers, admettent l'existence de **l'infini actuel** (ce qui est au cœur du problème traité dans cette note). Alors que les pragmatistes (et il se considère comme tel) n'admettent que les **objets qui peuvent être définis en un nombre fini de mots**.
La preuve de Cantor repose sur un nombre Y qui ne rentre pas dans ce cadre, donc les pragmatistes la réfutent a priori.

Mais la position des pragmatistes présente une faiblesse redoutable : elle en vient à nier l'existence des nombres transcendants, puisqu'ils ne peuvent pas être définis en un nombre fini de mots. Leur ensemble est donc d'une autre nature (une autre puissance selon Cantor) que l'ensemble des entiers, c'est donc **le grand mérite de Cantor de l'avoir établi**. Il est simplement dommage qu'il ait obscurci cette conclusion avec les notions de « cardinal », « dénombrabilité », qui étaient complètement inappropriées.

Jean Sousselier

Complément ajouté en 2023

Incohérence du théorème de Cantor

Considérons les nombres x compris entre 0 et 1. Ils s'écrivent en base 2 : $x=0,a_1a_2....a_n,,,,,,,,,$
avec $a_n=0$ ou 1

Considérons la suite constituée ainsi (appelée construction C) :

0
0,1
0,01
0,11
0,001
0,011
0,101
0,111
……………………………………………………….

Et donc, étant donné un nombre x :
1) soit x se trouve dans cette liste
2) soit x ne se trouve pas dans cette liste

A l'appui de la proposition 1), on peut dire que quel que soit n, on peut trouver une ligne L_n de cette suite égale à $0,a_1a_2....a_n$ et donc on ne voit pas ce qui empêcherait x de faire partie de cette suite.

Mais à l'appui de la proposition 2), on peut dire qu'elle résulte du théorème de Cantor, selon lequel l'ensemble des réels n'est pas dénombrable, ce qui serait pourtant le cas avec la proposition 1)

On doit donc rejeter la proposition 1) et conclure que malgré les apparences, la construction C définie ci-dessus ne permet d'atteindre aucun nombre (sauf les nombres avec un nombre fini de décimales).

Et donc la proposition : «que quel que soit n, on peut trouver une ligne L_n de cette suite égale à $0,a_1a_2....a_n$ » , ne peut être étendue à l'infini. Mais alors cela met à mal la preuve de Cantor, qui consiste à étendre à l'infini une proposition vraie jusqu'à l'ordre n !
La preuve de Cantor renferme sa propre contradiction !