

## Contribution à l'étude de « La conjecture de Syracuse »

### 1. Énoncé de la conjecture (Wikipedia)

En [mathématiques](#), on appelle **suite de Syracuse** une [suite d'entiers naturels](#) définie de la manière suivante : on part d'un nombre entier plus grand que zéro ; s'il est pair, on le divise par 2 ; s'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1. En répétant l'opération, on obtient une suite d'entiers positifs dont chacun ne dépend que de son prédécesseur.

Par exemple, à partir de 14, on construit la suite des nombres : 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2... C'est ce qu'on appelle la suite de Syracuse du nombre 14.

Après que le nombre 1 a été atteint, la suite des valeurs (1,4,2,1,4,2...) se répète indéfiniment en un cycle de longueur 3, appelé cycle trivial.

La **conjecture de Syracuse**, encore appelée **conjecture de Collatz**, **conjecture d'Ulam**, **conjecture tchèque** ou **problème  $3x + 1$** , est l'hypothèse mathématique selon laquelle la suite de Syracuse de n'importe quel entier strictement positif atteint 1.

En dépit de la simplicité de son énoncé, cette [conjecture](#) défie depuis de nombreuses années les mathématiciens. [Paul Erdős](#) a dit à propos de la conjecture de Syracuse : les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes<sup>1</sup>.

### 2. Bribes et carrefours.

Soit un nombre  $x$ . Dans toute suite de Syracuse où il apparaît, il n'a par définition qu'un seul successeur :  $x/2$  si  $x$  est pair,  $(3x + 1)$  si  $x$  est impair.

Combien peut-il avoir de prédécesseurs ?

- Un seul s'il est impair, à savoir  $2x$
- Un ou deux s'il est pair, à savoir d'une part  $2x$ , d'autre part éventuellement un nombre  $y$  tel que  $x = 3y + 1$ . Mais pour cela il faut que  $y$  soit impair, soit  $2n + 1$ , et donc  $x = 3(2n+1) + 1$ , soit  $x = 6n + 4$

En conclusion seuls les nombres de la forme  **$6n + 4$**  peuvent avoir 2 prédécesseurs, appelons les « **carrefours** »

Appelons « **bribe** » une séquence de nombres d'une suite de Syracuse compris entre un carrefour (inclus dans la bribe) et le carrefour suivant.

Une bribe est donc définie par un nombre  $(6n+4)$  et tous ses successeurs, jusqu'à ce qu'on tombe sur un autre carrefour (ou la valeur 1).

Chaque nombre n'appartient qu'à une seule bribe (sauf les cas des multiples de 6, voir plus loin « pseudo-bribes »).

Tout nombre impair a pour successeur un carrefour, et pour prédécesseur un nombre pair.

Toute suite de Syracuse est une succession de bribes (ou pseudo-bribes).

Chaque bribe (sauf terminale) est suivie d'une autre bribe.

Exemples de suites de Syracuse avec mise en évidence des bribes (les carrefours sont en jaune) :

3	10	5	16	8	4	2	1												
4	2	1																	
5	16	8	4	2	1														
6	3	10	5	16	8	4	2	1											
7	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2	1			
8	4	2	1																
9	28	14	7	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2	1
10	5	16	8	4	2	1													
11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2	1					

Le nombre 26 par exemple, ne peut jamais apparaître que dans la bribe (52, 26, 13)

**Liste des premières bribes** (la première colonne donne les valeurs successives de  $(6n+4)$ )

4	2	1			
10	5	16			
16	8	4			
22	11	34			
28	14	7	22		
34	17	52			
40	20	10			
46	23	70			
52	26	13	40		
58	29	88			
64	32	16			
70	35	106			

La première question à se poser est celle-ci : étant donné un nombre  $x$ , peut-on affirmer que dans la suite de Syracuse partant de ce nombre, on tombe forcément sur un carrefour ? Si ce n'était pas le cas, alors la conjecture de Syracuse serait fautive (on ne peut arriver à la valeur 1 qu'en passant par le carrefour 4).

Or cela est évident ; il suffit de tomber sur un nombre impair (puisque tout nombre impair a pour successeur un carrefour). Si on a une suite de nombre pairs, on tombe forcément sur un nombre impair dans la suite de Syracuse avec la division par 2 (ou la valeur 1).

### Carrefours et suivants

4	1
10	16
16	4
22	34
28	22
34	52
40	10
46	70
52	40
58	88
64	16
70	106
76	58
82	124
88	22
94	142
100	76
106	160
112	28
118	178
124	94
130	196
136	34
142	214
148	112
154	232
160	40

---

On pourrait compléter cette liste avec les **ascendants** : chaque carrefour ayant exactement 2 ascendants, que nous appellerons non pas le père et la mère, mais le pair et l'impair.

La liste ci-dessus représente le début de la **liste complète des bribes**, définies par leur carrefour initial et leur carrefour final.

### 3. Composition des bribes.

Une bribe est définie par un carrefour A, suivi d'un ou plusieurs nombres jusqu'au carrefour suivant B : A x y ... B

Démontrons qu'on ne peut avoir en fait que les configurations suivantes (en désignant par P un nombre pair et par I un nombre impair) :

1. A P B
2. A I B
3. A P I B

En effet, si le nombre précédant B est pair :  $B = 4 + 6N \rightarrow P = 8 + 12N \rightarrow$  ce nombre n'est pas un carrefour  $\rightarrow$  le nombre précédant P est  $16 + 24N = 4 + 6X$ , c'est un carrefour, cas 1.

Si le nombre précédent B est impair le double de I peut être :

$4 + 6N$  ou  $4 + 6N + 2$  ou  $4 + 6N + 4$

- $4 + 6N$  : c'est un carrefour, on est donc dans le cas 2. A I B
- $4 + 6N + 4$  : le nombre précédent est  $16 + 12N$  qui est un carrefour, on est donc dans le cas 3. A P I B
- $4 + 6N + 2$  : soit  $6(N+1)$ , dont le nombre précédent est  $12(N+1)$ , dont le nombre précédent est  $24(N+1)$  et ainsi de suite : dans ce cas on n'atteint jamais un carrefour, on peut prolonger cette suite à l'infini.  
Ce cas se produit avec tous les multiples de 6.

Si on considère la suite (12 - 6 - 3 - 10), on ne peut trouver la bribe (A ... 12 - 6 - 3), puisque le carrefour A n'existe pas, on n'obtient qu'une suite infinie de multiples de 6.

En conclusion, les bribes n'appartiennent qu'aux cas 1 à 3 :

1) A P B	$B = A/4$	$B < A$	$A = 4 B$
2) A I B	$B = 3 A/2 + 1$	$B > A$	$A = 2 / 3 ( B - 1 )$
3) A P I B	$B = 3 A/4 + 1$	$B < A$	$A = 4 / 3 ( B - 1 )$

#### Remarque 1 :

Il faut apporter une correction à ce qui précède : il y a une suite de Syracuse particulière qui n'est pas accessible à partir de cette table des bribes, c'est la suite partant de 1, à savoir : 1 - 4, que nous appellerons pseudo- bribe (1-4).

#### Remarque 2 :

Tout nombre appartient à une bribe et une seule, avec le cas particulier des **multiples de 6, qui appartiennent à une pseudo-bribe infinie** comme par exemple (..... 72 - 36 - 18 - 9 - 28 ) : les multiples de 6 ne sont pas des carrefours, et on ne trouve pas de carrefours dans leurs ascendants.

Une telle bribe infinie se termine forcément par un impair multiple de 3, et inversement tout multiple de 3 a pour ascendant un multiple de 6 et donc appartient à une bribe infinie. Donc les vraies bribes, partant d'un carrefour A et aboutissant à un carrefour B **ne contiennent aucun multiple de 3.**

Donc, les nombres constituant une bribe (hors les extrémités) sont de la forme

**$6N + 1$ , ou  $6N + 2$ , ou  $6N + 5$ .**

### Remarque 3 :

Etudions le contenu des bribes selon qu'elles renferment  **$6N + 1$ ,  $6N + 2$ , ou  $6N + 5$ .**

Avec  $6N+1$ , on a la suite suivante, en calculant son successeur et ses prédécesseurs :

(b1) :  $24N+4 \rightarrow 12N+2 \rightarrow 6N+1 \rightarrow 18N+4$  de la forme **A P I B**

Avec  $6N+5$ , on a la suite :

(b5) :  $6(2N+1)+4 \rightarrow 6N+5 \rightarrow 6(3N+2)+4$  de la forme **A I B**

Avec  $6N+2$ , il faut distinguer les cas où  $N = 2p$  ou  $N=2p+1$ , conduisant à :

(b2) :  $12N+4 \rightarrow 6(2p+1)+2 \rightarrow 6p+4$  de la forme **A P B**

$12N+4 \rightarrow 12p+2 \rightarrow 6p+1 \rightarrow 18p+4$

Ce dernier cas est le même que le premier cas, il n'y a donc que 3 formes de bribes, (b1), (b2), et (b5).

Les cas (b1) et (b2) conduisent à une diminution ( $B < A$ ), et le cas (b5) conduit à une augmentation ( $B = 3 A/2 + 1$ ).

### Remarque 4 :

La liste des bribes définit également **l'ensemble des suites de Syracuse** : étant donné un nombre n quelconque, il suffit de trouver le carrefour C1 qui suit n (c'est  $3n+1$  si n est impair, si n est pair il suffit de le diviser C par 2 jusqu'à ce qu'on trouve un impair). Le carrefour C2 est le suivant de C1 dans cette liste, le carrefour C3 est le suivant de C2 et ainsi de suite.

Conformément à ce qui précède, **une suite de Syracuse ne contient aucun multiple de 3**, sauf le cas échéant sa valeur initiale, et ses successeurs immédiats (36 - 18 - 9 - 28).

Les possibilités d'une suite de Syracuse sont les suivantes :

- Convergence vers 1

- Boucles, ou cycles (on retombe sur un carrefour Cx qu'on a déjà rencontré)
- Divergence : la valeur de Cx tend vers l'infini. :

**Remarque probabiliste :**

Pour aller du carrefour A au carrefour B, on a donc 3 possibilités

1. A P B
2. A I B
3. A P I B

Le tableau ci-dessous donne les probabilités d'occurrence pour ces 3 probabilités, ainsi que la valeur de B obtenue :

Cas	Composition	Probabilité	Valeur de B
1	A P B	0.25	A/4
2	A I B	0.5	3A/2+1
3	A P I B	0.25	3A/4+1

Les probabilités sont bien celles indiquées : en effet  $A=4 + 6N$ , donc  $A/2 = 2 + 3N$  qui est pair ou impair en même temps que N, donc la probabilité du cas 2 ( A I ..) est 0.5, et celle des cas 1 ou 3 ( A P ..) est de 0.5.

Pour ces cas 1 ou 3, on a  $N = 2M$ ,  $A/2 = 2 + 6M$ ,  $A/4 = 1 + 3M$ , qui est pair ou impair à l'opposé de M, d'où les probabilités de 0.25 pour les cas 1 et 3.

Finalement, la valeur probable de B est égale à A multiplié par un coefficient  $\omega$ ,

avec  $\omega=0.25$  dans le cas 1,  $\omega = 1.5 + \epsilon$  dans le cas 2, et  $\omega = 0.75 + \epsilon$  dans le cas 3, et donc la valeur probabiliste de  $\omega$  est (en négligeant les  $\epsilon$ ) :

$$\omega = 0.25^{0.25} \times 1.5^{0.5} \times 0.75^{0.25}$$

$$= 0,70710 \times 1,224744 \times 0,930604 = 0,80592$$

On observe donc une décroissance rapide des valeurs successives des carrefours. Cela ne prouve pas la convergence des suites, mais c'est un encouragement à la recherche de sa démonstration !

**4. Graphe des carrefours.**

A part le cas particulier de 2 bribes ou pseudo-bribes (1-4) et (4-1) qui forment une boucle, il faut démontrer qu'il n'y a pas d'autres boucles possibles, et qu'il n'y a pas de divergence des suites de Syracuse.

Etudier de telles suites revient à étudier la suite des bribes, c'est-à-dire les cheminements de carrefour en carrefour.

Considérons le **graphe orienté** dont les sommets sont les carrefours (incluant le pseudo-carrefour 1) et dont les arcs sont définis ainsi : il y a un arc de A vers B si B est le successeur de A, c'est-à-dire s'il y a une bribe (A...B).

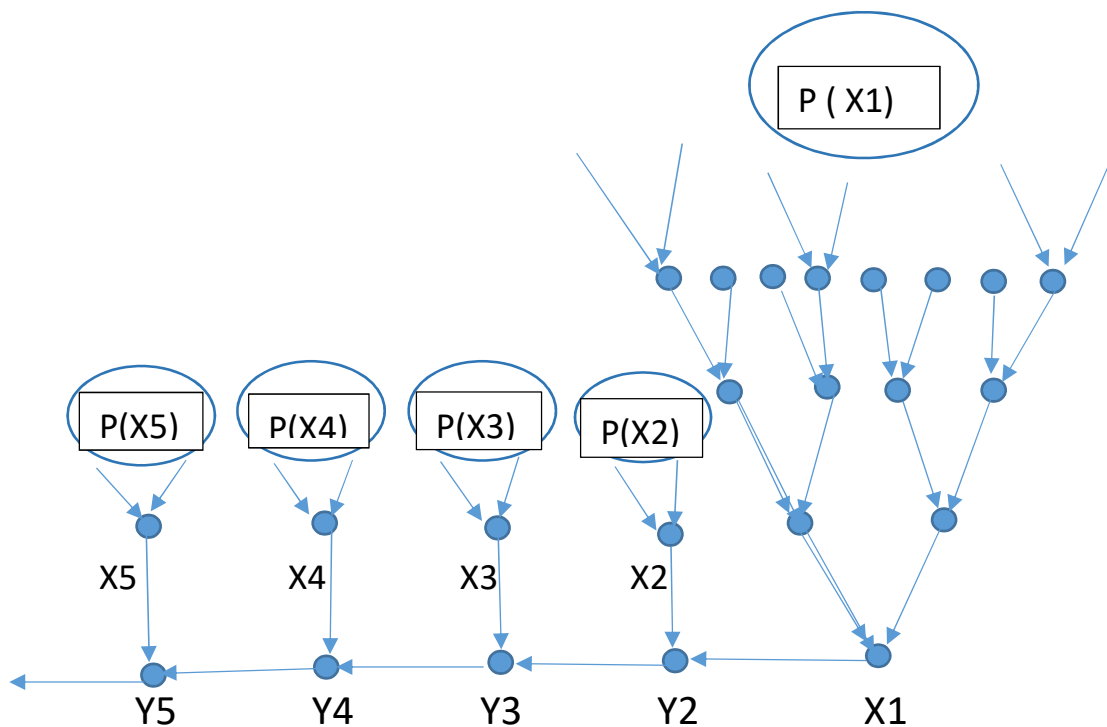
C'est un graphe orienté très particulier, car **chaque sommet a un descendant et deux ascendants** (sauf le sommet 1 qui n'a qu'un ascendant).

Etant donné un sous-ensemble S de carrefours, on appelle **parentèle** de S l'ensemble des carrefours qui ont parmi leurs descendants un sommet de S. La parentèle P de S comprend tous les sommets de S, tous leurs ascendants directs, tous les ascendants de leurs ascendants et ainsi de suite. Il s'agit d'un **ensemble infini** : en effet s'il n'y avait qu'un nombre fini X de sommets dans la parentèle P de S, comme ces sommets n'ont qu'un descendant, les X sommets auraient au maximum un ascendant, donc il y aurait au moins X sommets extérieurs à P ayant pour descendants un sommet de S, donc ils feraient partie de P, ce qui est contraire à l'hypothèse initiale.

Regardons ce qui se passe quand S se réduit à un seul carrefour.

## Ascendants et descendants d'un carrefour X1

Considérons le sous-graphe constitué de tous les ascendants et descendants d'un carrefour X1



Les ascendants de X1 forment sa parentèle P(X1)

Soit  $Y_2$  le descendant de  $X_1$ ,  $Y_3$  le descendant de  $Y_2$  etc.  
 Soit  $X_2$  l'autre ascendant de  $Y_2$ ,  $X_3$  l'autre ascendant de  $Y_3$  etc.

$P(X_2)$  est la parentèle de  $X_2$

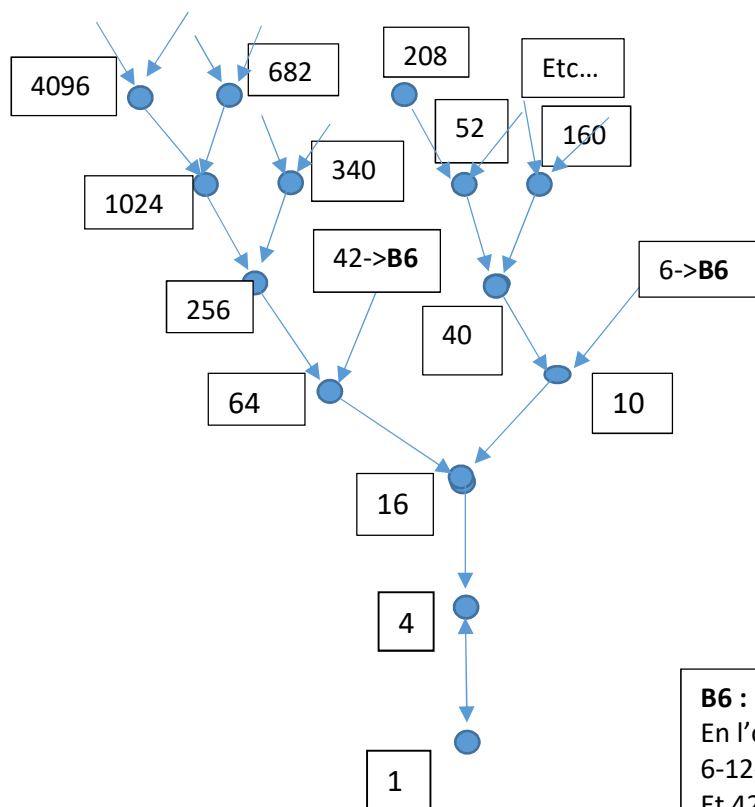
-----  
 $P(X_5)$  est la parentèle de  $X_5$  etc

Etudions les différentes possibilités d'évolution de ce sous-graphe contenant l'ensemble des ascendants et descendants de  $X_1$ . Elles dépendent de la suite  $Y_2 - Y_3 - \dots - Y_n$

- Ou bien elle converge, c'est-à-dire que  $Y_n = 1$  Nous obtenons la **famille 1**
- Ou bien elle diverge,  $Y_n$  augment indéfiniment sans jamais être égal à une valeur précédente du sous-graphe : c'est la **famille 2**
- Ou bien elle boucle, c'est-à-dire que  $Y_n$  est égal à un des  $Y$  précédents, ou un des  $X$  précédents, ou un sommet de leurs parentèles : c'est la **famille 3**

**La famille 1** se termine par  $Y_k - 16 - 4 - 1$  En effet le seul ascendant de 1 est 4, et le seul ascendant de 4 (autre que 1) est 16. Donc la famille 1 est constitué de la parentèle de 4. Et cette parentèle comprend **toutes les suites de Syracuse possibles** (définies par la suite de leurs carrefours).

Famille 1 : Parentèle de 4, contenant les carrefours de toutes les suites de Syracuse possibles



**B6** : Pseudo-Bribe multiples de 6  
 En l'occurrence les suites  
 6-12-24-48...  
 Et 42-84-128-...



**La famille 2** qui diverge (si elle existe) ne contient par définition aucune boucle, Toutes les parentèles  $P(X_j)$  sont étrangères les unes aux autres (elles ne contiennent aucun sommet d'une autre parentèle). Les sommets de cette famille 2 ne font pas partie de la parentèle de 4.

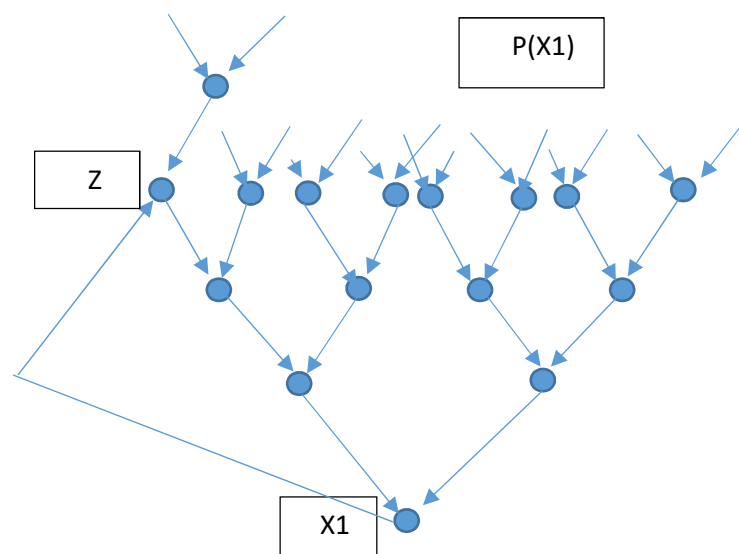
**La famille 3** se termine par une boucle (si elle existe), donc  $Y_n$  se retrouve dans une des parentèles  $X_j$ , ou bien dans un autre  $Y_k$  (sans que cela soit déjà arrivé avec  $Y_j$ ,  $j < n$ ).

Examinons d'abord le cas où  $Y_n = Y_k$  ( $k < n$ ). Mais dans ce cas, ses ascendants  $X_n$  et  $Y_{n-1}$  sont les mêmes que les ascendants de  $Y_k$  soit  $X_k$  et  $Y_{k-1}$ , donc on aurait  $Y_{n-1} = Y_{k-1}$  ou  $Y_{n-1} = X_k$ , donc  $Y_n$  ne serait pas le premier à se répéter. Ce cas est donc impossible.

Si maintenant  $Y_n$  est égal à  $X_j$  ( $j < n$ ) ou à un des sommets de  $P(X_j)$ , alors son ascendant  $Y_{n-1}$  se retrouve dans  $P(X_j)$  donc  $Y_n$  ne serait pas le premier à avoir cette caractéristique.

Finalement la seule possibilité de boucle est celle-ci :  $Y_1$  fait partie de  $P(X_1)$ , donc  $X_1$  a pour descendant l'un de ses ascendants.

- **Famille 3** : le successeur de  $X_1$  est  $Z$ , qui fait partie de  $P(X_1)$



Les sommets de  $P(X_1)$  sont bien entendu absents de la famille 1.

Finalement :

- Si la parentèle de 4 inclut tous les carrefours, c'est-à-dire toutes les valeurs  $4+6N$ , alors la conjecture de Syracuse est vérifiée
- Sinon, la conjecture est fautive.

On pouvait dire aussi plus simplement :

- Si le graphe des carrefours n'est constitué que d'une seule composante connexe, la conjecture de Syracuse est vérifiée.
- S'il comprend plusieurs composantes connexes, elle est fausse.

## 5. Etude des descendants.

Etudions le descendant du carrefour  $X = 4 + 6N$ , en fonction des valeurs de  $N$

Tout  $N$  peut s'écrire  $N = 2^q (2p+1)$

Avec  $q = 0, 1, 2, \dots$

Et  $p = 0, 1, 2, \dots$

Si  $q=0$ , donc  $X = 4 + 6(2p+1)$ , le successeur de  $X$  est  $2+3(2p+1) = 6p+5$ , dont le successeur (qui est donc le descendant de  $X$ ) est  $18p + 16$ , soit le carrefour  $4+6(3p+2)$

(à suivre)

